Лекция 3. Комплекс жазықтықтың топологиясы

Жоспар:

1. Комплекс айнымалы функциялардың үзіліссіздігі
2. Жинақты комплекс сандар тізбегінің қасиеттері
3. Анықтамалар
4. Мысалдар

$z_1, z_2, ..., z_n, ...$ – комплекс сандар тізбегі берілсін.

Анықтама 1. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $N = N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, барлық $n > N$ үшін $|z_n - a| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда a – комплекс саны $\{z_n\}$ тізбегінің шегі деп аталады және былай жазылады:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a.$$

Шегі a – ға тең $\{z_n\}$ тізбегі a санына жинақталады деп аталады.

$|z_n - a| < \varepsilon$ теңсіздігінің геометриялық мағынасы: z_n нүктесі радиусы ε – ға тең, центрі a нүктесіндегі шеңбердің ішінде жатады.

$\{z_n\}$ комплекс сандар тізбегі екі $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ нақты сандар тізбегіне сәйкес келеді, мұнда $z_n = x_n + iy_n$.

Теорема. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ шегі табылады, сонда тек сонда ғана, егер

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \beta,$$

теңдіктері орындалса, мұнда $a = \alpha + i\beta$.

Анықтама 2. Егер $\{z_n\}$ тізбегінің барлық элементтері үшін $|z_n| < M$ теңсіздігі орындалса, онда $\{z_n\}$ тізбегі шектелген деп аталады.

Теорема. Кез келген жинақты тізбек шектелген.

Кері тұжырым жалпы жағдайда дұрыс емес. Кез келген шектелген тізбекті жинақты деуге болмайды.

Жинақты комплекс сандар тізбегінің қасиеттері:

Егер $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = b$ болса, онда

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n \pm \tau_n) = a \pm b;$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \cdot \tau_n = a \cdot b;$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{\tau_n} = \dfrac{a}{b}, \ \tau_n \neq 0, \ b \neq 0.$

Комплекс сандар тізбегінің жинақтылығының жеткілікті шарттары.

$z_n = r_n e^{i\varphi_n}$ тізбегі берілсін, мұнда $r_n = |z_n|, \ \varphi_n = \arg z_n$

Егер $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r, \ \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ болса, онда

$$\lim_{n\to\infty} z_n = re^{i\varphi}.$$

Ескерту. $\{z_n\}$ тізбегі жинақты болғанымен $\varphi_n = \arg z_n$ тізбегі жинақсыз болуы да мүмкін.

Мысал. $\{z_n\} = \dfrac{(-1)^n}{n}$ тізбегі жинақты, себебі $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$, бірақ

$$\varphi_n = \arg z_n = \arg \frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} 0, & егер \quad n - жұп, \\ \pi, & егер \quad n - тақ. \end{cases}$$

Сонымен $\arg z_n$ тізбегі келесі түрде жазылады: $0, \pi, 0, \pi, \ldots$ демек бұл тізбектің шегі жоқ.

Анықтама 3. $|z - z_0| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын z нүктелер жиынын z_0 нүктесінің δ – аймағы деп атайды.

Анықтама 4. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $\delta = \delta(\varepsilon)$ саны табылып, $0 < |z - z_0| < \delta$ шартын қанағаттандыратын барлық z үшін

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, онда A саны $f(z)$ функциясының z_0 нүктесіндегі шегі деп аталады және былай жазылады:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A.$$

Функцияның шегінің тағы бір анықтамасын келтірейік.

Анықтама 5. Егер z_0 нүктесіне жинақталатын кез келген $\{z_n\}$ $(z_n \neq z_0)$ тізбегіне сәйкес $\{f(z_n)\}$ функциясы тізбегінің мәндері A комплекс санына жинақталса, онда A саны $f(z)$ функциясының z_0 нүктесіндегі шегі деп аталады.

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ шегінің табылуы, мұнда $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) \quad \text{және} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y)$$

шектерінің табылуына эквивалент, және

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) + \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y).$$

Комплекс айнымалы функцияның шегінің қасиеттері:

Егер $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$, $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = B$ шектері табылса, онда төмендегі шектер табылады және мына теңдіктер орындалады:

1. $\lim\limits_{z \to z_0} (f(z) \pm g(z)) = A \pm B;$
2. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) g(z) = A \cdot B;$
3. $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{A}{B}, \quad B \neq 0.$

Анықтама 6. Егер D облысында берілген $f(z)$ функциясы үшін

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0), \quad (z_0 \in D)$$

теңдігі орындалса, онда $f(z)$ функциясы z_0 нүктесінде үзіліссіз деп аталады.

Басқа сөзбен айтқанда: егер $\forall \varepsilon > 0$ саны үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, $|z - z_0| < \delta$ шартын қанағаттандыратын барлық $z \in D$ нүктелері үшін

$$|f(z) - f(z)_0| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, онда $f(z)$ функциясы z_0 нүктесінде үзіліссіз деп аталады.

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функциясы $z_0 = x_0 + iy_0$ нүктесінде үзіліссіз болуы үшін, $u(x,y)$ және $v(x,y)$ фукнцияларының (x_0, y_0) нүктесінде үзіліссіз болуы қажетті және жеткілікті.

Анықтама 7. Егер $f(z)$ функциясы D облысының әрбір нүктесінде үзіліссіз болса, онда $f(z)$ функциясы D облысында үзіліссіз деп аталады.

Егер $f(z)$ және $g(z)$ функциялары D облысында үзіліссіз болса, онда

a) $f(z) \pm g(z)$;

b) $f(z) \cdot g(z)$;

c) $\dfrac{f(z)}{g(z)}$, $(g(z) \neq 0)$;

функциялары да D облысында үзіліссіз.

1-мысал. $z_n = e^{-i\left(\pi + \frac{2}{3n}\right)}$ тізбегінің шегін табыңыз.

Шешуі. Эйлер формуласын қолданайық.

$$\lim_{n\to\infty} e^{-i\left(\pi + \frac{2}{3n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(\pi + \frac{2}{3n}\right) - i\sin\left(\pi + \frac{2}{3n}\right)\right),$$

Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0, \cos\pi = -1,\ \sin\pi = 0$ екенін ескерсек, онда

$$\lim_{n\to\infty} e^{-i\left(\pi + \frac{2}{3n}\right)} = -1.$$

Демек, есептің жауабы: -1.

2-мысал. $x_n = \rho\sin\alpha + \rho^3\sin 3\alpha + ... + \rho^{2n-1}\sin(2n-1)\alpha$, мұнда $0 < \rho < 1$, $n = 1,2,...$ тізбегі берілсін. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n -$ табыңыз.

Шешуі. Берілген тізбекке қосымша $y_n = \rho\cos\alpha + \rho^3\cos 3\alpha + ... + \rho^{2n-1}\cos(2n-1)\alpha$ тізбегін қарастырайық. $z_n = ix_n + y_n$ комплекс сандар тізбегін құрамыз:

$$z_n = y_n + ix_n = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) + \rho^3(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha) + ...$$
$$... + \rho^{2n-1}(\cos(2n-1)\alpha + i\sin(2n-1)\alpha).$$

Егер $\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = t$ деп белгілесек, онда $z_n = t + t^3 + \ldots + t^{2n-1}$.

Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысының формуласын ескерсек, онда $z_n = \dfrac{t\left(1 - t^{2n}\right)}{1 - t^2}$, $\quad |t| < 1$ болғандықтан $\lim\limits_{n\to\infty} t^{2n+1} = 0$.

Олай болса, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \dfrac{t}{1 - t^2}$.

Демек,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \operatorname{Im}\left(\frac{t}{1 - t^2}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{1 - \rho^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)}\right) =$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{(\rho\cos\alpha + i\rho\sin\alpha)(1 - \rho^2\cos 2\alpha + i\rho^2\sin 2\alpha)}{(1 - \rho^2\cos 2\alpha)^2 + \rho^4\sin^2 2\alpha}\right) = \frac{\rho(1 + \rho^2)\sin\alpha}{(1 - \rho^2\cos 2\alpha)^2 + \rho^4\sin^2 2\alpha} =$$

$$= \frac{\rho(1 + \rho^2)\sin\alpha}{1 - 2\rho^2\cos 2\alpha + \rho^4}$$

Сонымен жауабы: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{\rho(1+\rho^2)\sin\alpha}{1-2\rho^2\cos 2\alpha+\rho^4}$

3-мысал. Келесі теңдікті дәлелдеңіз:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3-2i}{2n}\right)^n = e^{\frac{3}{2}-i}.$$

Дәлелдеуі. $\left(1+\dfrac{3-2i}{2n}\right)^n = z_n$ арқылы белгілейік. Модульдің шегін есептейміз.

$$\lim_{n\to\infty}|z_n| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{3-2i}{2n}\right)^n\right| = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{2n}\right)^2+\frac{1}{n^2}\right]^{n/2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{12n+13}{4n^2}\right)^{n/2} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{12n+13}{4n^2}\right)^{\frac{4n^2}{12n+13}}\right]^{\frac{(12n+13)}{8n}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

Енді аргументінің шегі:

$$\lim_{n\to\infty}\arg z_n = \lim_{n\to\infty}\arg\left(1+\frac{3-2i}{2n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot arctg\left(-\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{2n}}\right) =$$

$$= -\lim_{n\to\infty} n\cdot arctg\left(\frac{2}{2n+3}\right) = -1.$$

Демек,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}|z_n|\, e^{i\arg z_n} = e^{\frac{3}{2}}\cdot e^{-i} = e^{\frac{3}{2}-i}.$$

4-мысал. Келесі шекті есептеңіз:

$$\lim_{z\to 3i}\frac{z^2-(2+2i)z+3+6i}{z^2-3iz}.$$

Шешуі. z – тің орнына $3i$ санын қойып, шектің мәні неге тең екенін тексерейік.

$$f(3i) = \frac{-9-(2+2i)\cdot 3i+3+6i}{-9-3i\cdot 3i} = \frac{-9-6i+6+3+6i}{-9+9} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Демек, $z=3i$ нүктесінде берілген функция анықталмаған. Олай болса,

$$z^2-(2+2i)z+3+6i=0$$

квадрат теңдеуінің түбірлерін табайық.

$$z_{1,2} = (1+i)+\sqrt{(1+i)^2-3-6i} =$$

$$= 1+i+\sqrt{1+2i-1-3-6i} = 1+i+\sqrt{-3-4i}.$$

$-3-4i$ комплекс санының түбірін $x+iy$ арқылы белгілейік

$$\sqrt{-3-4i} = x+iy.$$

Соңғы теңдіктің екі жағын да квадраттайық.

$$-3-4i = x^2 + 2xyi - y^2$$

Комплекс сандардың теңдігін ескерсек, келесі жүйеге келеміз:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3; \\ xy = -2. \end{cases}$$

Соңғы жүйенің шешімдері: $x_1 = 1,\ y_1 = -2,\ x_2 = -1,\ y_2 = 2$ екенін табу қиын емес. Демек,

$$z_{1,2} = \left[\begin{array}{l} 1 + i + 1 - 2i = 2 - i; \\ \\ 1 + i - 1 + 2i = 3i. \end{array} \right.$$

Олай болса, берілген шекті былай жазуға болады:

$$\lim_{z\to 3i} \frac{z^2 - (2+2i)z + 3 + 6i}{z^2 - 3iz} = \lim_{z\to 3i} \frac{(z-3i)(z-2+i)}{z(z-3i)} =$$

$$= \lim_{z\to 3i} \frac{z-2+i}{z} = \frac{-2+4i}{3i} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}i.$$

Жауабы: $\frac{4}{3} + \frac{2i}{3}$.

5-мысал. Келесі шекті есептеңіз:

$$\lim_{z\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2z}{ch\, iz + i\, sh\, iz}.$$

Шешуі. Алдымен $z = \frac{\pi}{4}$ нүктесіндегі мәнін анықтап алайық

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{ch\left(i\frac{\pi}{4}\right) + ish\left(i\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Егер $ch\, iz = \cos z,\ i\, sh\, iz = -\sin z$ формулаларын ескерсек, онда

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{0}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \left(\frac{0}{0}\right)$$

анықталмағандығына келеміз.

Егер берілген функцияны түрлендірейік:

$$\lim_{z\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2z}{ch\, iz + i\, sh\, iz} = \lim_{z\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 z - \sin^2 z}{\cos z - \sin z} =$$

$$= \lim_{z\to \frac{\pi}{4}} (\cos z + \sin z) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Жауабы: $\sqrt{2}$.

Пайдаланылған әдебиеттер:

1. Төлегенова М. Б., Қойлышев У.Қ. Комплекс айнымалы функциялар теориясы және Амалдық есептеу. Оқу құралы. Қазақ ун-ті, 2021. Қазақша, орысша, ағылшынша.
2. Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1991 (предыдущие издания 1965, 1967).
3. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть 1. М.: Наука, 1985. (Предыдущие издания: 1968, 1976).
4. Сборник задач по теории аналитических функций. Под ред. М.А. Евграфова. Изд. 2-е доп. М.: Наука,1972.
5. Кангужин Б.Е. Теория функций комплексного переменного. Алматы. Қазақ университеті, 2007.